Spettrometria: teoria ed applicazioni nel campo della Radioastronomia

a cura di Francesco Schillirò

Sommario

- **Analisi Spettrale**

  Segnali determinisici

  Trasformata di Fourer e Spettro di un segnale:

  Densità spettrale di Potenza

  Spettrogramma di un segnale.

  Finestratura della FFT

  Principio di Indeterminazione tempo frequenza

  Segnali tempo discreti: DFT e FFT

- **Rumore**

  Processi Stocastici

  Statistica del processo: stazionarietà, ergodicità, media ed autocorrelazione

  Rumore bianco

- **Misura dello Spettro di Potenza**

  Spettrometri: FB, autocorrelazione,FFT.

- **Il Radiotelescopio**

Segnali Deterministici

Si definisce 'segnale' una qualsiasi funzione f(t) funzione del tempo, generalmente continua e derivabile in R. Si definisce energia del segnale del tempo la quantità

$$Ef = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 \, dt < +\infty \qquad (1)$$

in tal caso il segnale si dice ad energia finita o integrabile secondo Lesbegue, o ancora appartenente allo spazio L^2 Tale spazio viene definito vettoriale, in virtù del fatto che è possibile assimilare un segnale f(t) ad un vettore **v** che ha infinite componenti, ognuna corrispondente proprio al valore f(t). In tale prospettiva la formula (1) si spiega proprio la definizione di energia di un vettore , pari proprio ad

$$E(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \qquad (2)$$

dove naturalmente la sommatoria è sostituita dall'integrale, essendo il segnale un vettore ad infinite componenti.

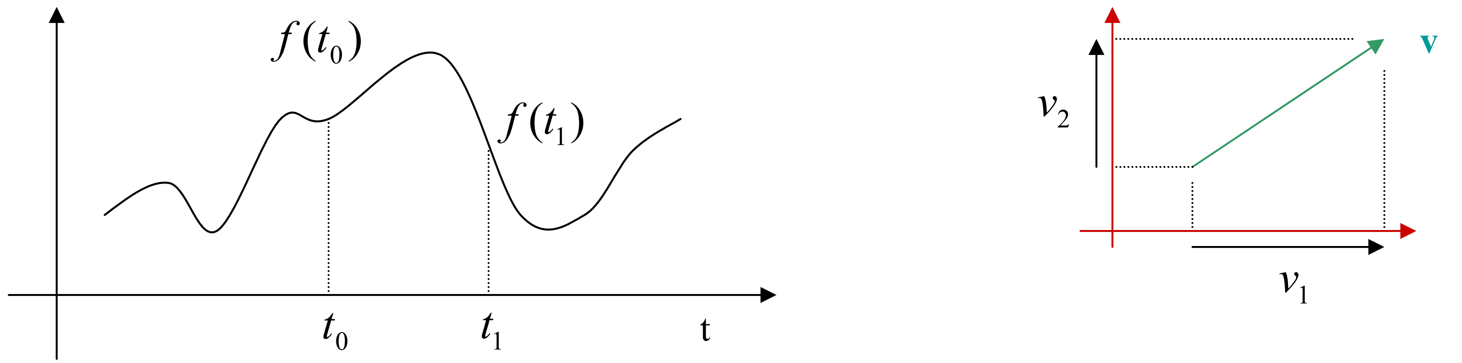


FIG. 1

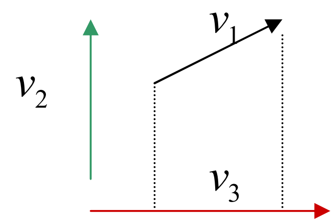
Segnali Deterministici

Per completezza , definiamo potenza istantanea del segnale f(t) la quantità:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)^2\,dt \qquad (3)$$

Ancora in analogia con la teoria dei vettori , possiamo definire il prodotto scalare tra due segnali ;così come esso nel caso dei vettori serve a misurare la componente di uno nella direzione dell'altro, anche nello spazio delle funzioni esso dà una stima di quanto è desumibile una funzione rispetto ad un'altra. Due funzioni ortogonali, così come due vettori, non possono essere ricavate l'una dall'altra secondo una trasformazione lineare.

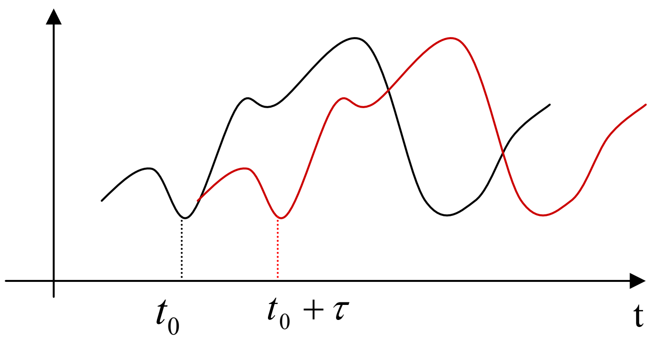
$$\left\langle f_1(t), f_2(t)\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t)\,dt \qquad (4)$$



$$f_1(t) = af_2(t) + bf_3(t) \qquad \forall a,b \in R$$

$$f_2(t) \neq af_3(t) \qquad \nexists a \in R$$

Possiamo ancora definire un'altra quantità fondamentale tra i segnali, ovvero la funzione di autocorrelazione di un dato segnale f(t), che si definisce come il prodotto scalare tra il segnale stesso ed una sua copia traslata nel tempo.



$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau)\,dt \qquad (5)$$

La funzione di autocorrelazione misura quanto similare a se stesso può essere un segnale al variare di una traslazione temporale τ

Trasformata di Fourier e Spettro di un segnale

Si consideri adesso la funzione esponenziale complessa

$$e^{jx} = \cos(x) + j sen(x) \qquad (6)$$

essendo j l'unità del campo immaginario. Tale esponenziale è una funzione periodica del generico argomento x. Supponiamo di esplicitare l'argomento in funzione del tempo t, mediante un parametro che misuri il numero di periodi presenti nell'unità di tempo, parametro che definiamo con **f** frequenza: $x = (2\pi f) * t$

A questo punto, dato un determinato segnale s(t), ci si pone il problema di misurare il grado di corrispondenza lineare tra il segnale stesso e la funzione esponenziale (6) , fissato il parametro frequenza . In altre parole si vuole trovare se è possibile esprimere il segnale s(t) come combinazione lineare di funzioni esponenziali complesse con il parametro f fissato ad un determinato valore. Tali funzioni rappresentano una **base funzionale**, ovvero un set di funzioni ortogonali tra loro, la cui somma infinita pesata da opportuni coefficienti costanti, approssima il segnale di partenza.

$$s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j(2\pi f_0 n)t} \qquad (7)$$

Naturalmente il calcolo è approssimato in quanto si sta usando un solo parametro frequenziale fo e i suoi infiniti multipli **n*fo** ; ma se si suppone di considerare tutte le infinite funzioni complesse con il parametro frequenza reale, da -: a +: allora si può ricostruire perfettamente il segnale s(t), ottenendo:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j(2\pi f)t} df \qquad (8)$$

Trasformata di Fourier e Spettro di un segnale

La ricostruzione del segnale s(t) di partenza avviene su uno spazio vettoriale della variabile reale frequenza **f**, mediante le funzioni base esponenziali complesse. Tale variabile non è più un multiplo discreto di una determinata frequenza fo, ma si estende su tutti i suoi infiniti valori da -: a +:; da qui si giustifica l'uso dell'integrale che sostituisce la sommatoria del caso discreto. Abbiamo spostato l'analisi del segnale s(t) in un'altra dimensione , quella frequenziale : la quantità S(f), è una funzione complessa della frequenza, e misura il coefficiente per il quale deve essere pesata una singola funzione esponenziale di frequenza **f** al fine di ricostruire il segnale.

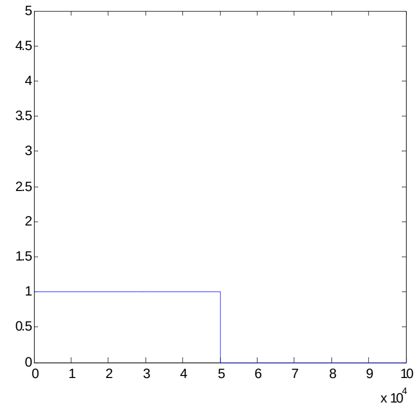
Definiamo tale grandezza S(f) Trasformata di Fourier del segnale s(t) nel dominio del tempo; essa è una funzione della frequenza, e si ricava dal prodotto scalare della funzione s(t) sul generico esponenziale complesso $e^{-j(2\pi f)t}$

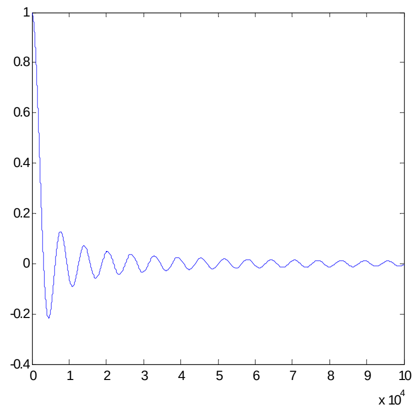
$$S(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j(2\pi f)t}\,dt \qquad (9)$$

La trasformata di Fourier è in generale un numero complesso, scomponibile quindi sia in una parte reale ed immaginaria, ma soprattutto in un modulo ed una fase, i quali rappresentano l'ampiezza e la fase di un segnale periodico esponenziale complesso a frequenza **f** contenuto nel segnale considerato.

Dominio del tempo:

Gradino unitario





Dominio della frequenza:

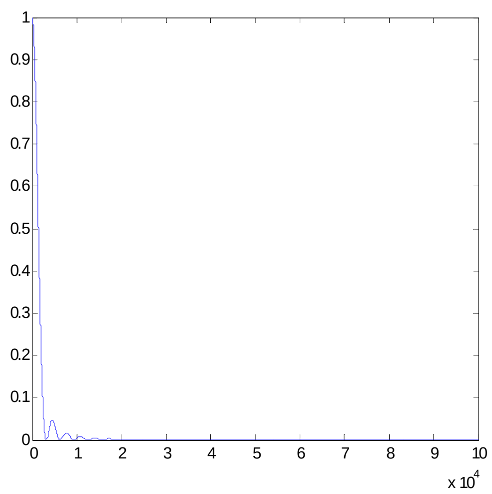
Funzione seno circolare

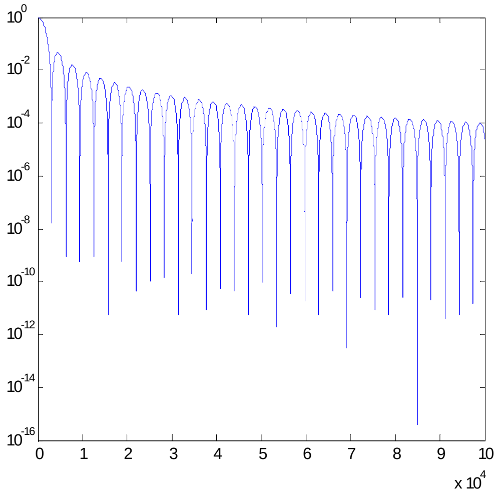
Trasformata di Fourier e Spettro di un segnale

L'analisi del contenuto frequenziale o spettrale di un segnale diventa fondamentale grazie alla seguente proprietà:

$$Es = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S^2(2\pi jf)df \qquad (10)$$

Ovvero la quantità di energia del segnale è ricavabile come area sottesa dalla funzione trasformata di Fourier elevata al quadrato. Tale funzione viene definita Densità Spettrale di Potenza o Spettro, e misura il contributo in potenza di ogni segnale esponenziale complesso che compone il segnale.





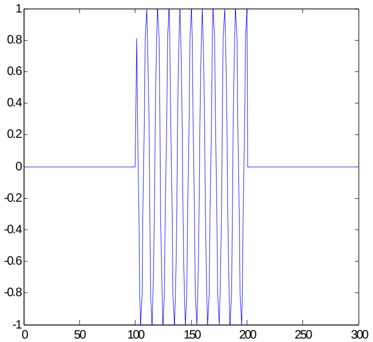
Si definisce **banda** di un segnale, l'intervallo in cui è definito il suo spettro nel dominio della frequenza. Un segnale a banda limitata ha un contributo spettrale distribuito su una infinità contigua ma limitata di frequenze.

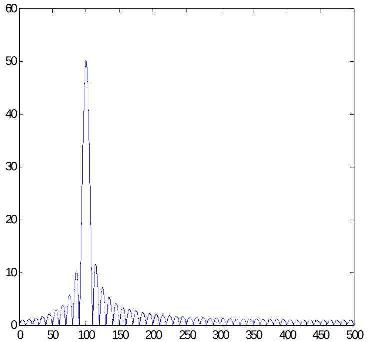
Un qualsiasi dispositivo in grado di selezionare una porzione di banda del segnale si dice **filtro .**

Troncamento del segnale e finestratura

Un qualsiasi segnale s(t) di durata teoricamente infinita, deve essere studiato in un intervallo di tempo finito, quindi deve essere troncato. Il troncamento tuttavia introduce delle componenti spettrali aggiuntive indesiderate , come è possibile vedere in figura.

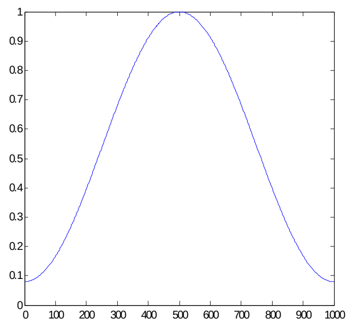
Segnale sin(x) troncato



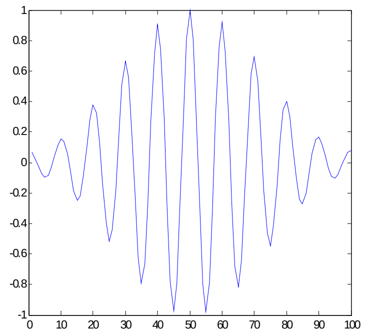


Spettro del segnale sin(x) troncato

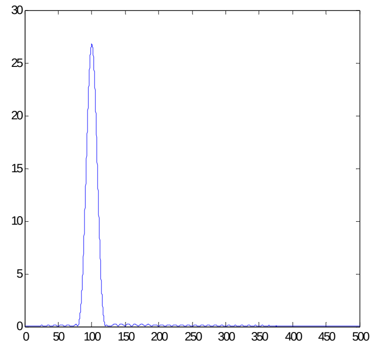
Spesso è utile pesare il segnale nella sua parte centrale , piuttosto che nei bordi laterali vicini al troncamento. Ciò si traduce nel prodotto del segnale di durata infinita per un segnale 'window' di forma opportuna, il cui risultato è un segnale con uno spettro con una componente principale leggermente espansa, ma con lobi laterali notevolmente ridotti



Segnale 'Hamming window'



Segnale sin(x) finestrato



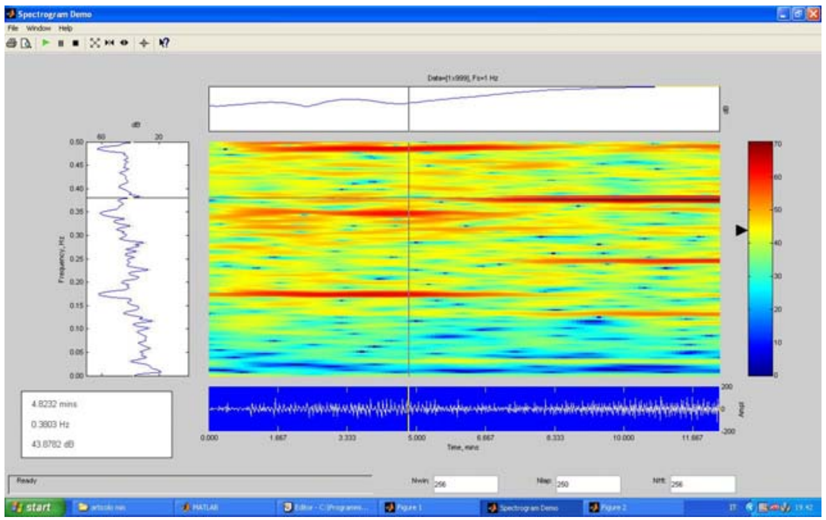
Spettro di sin(x) finestrato

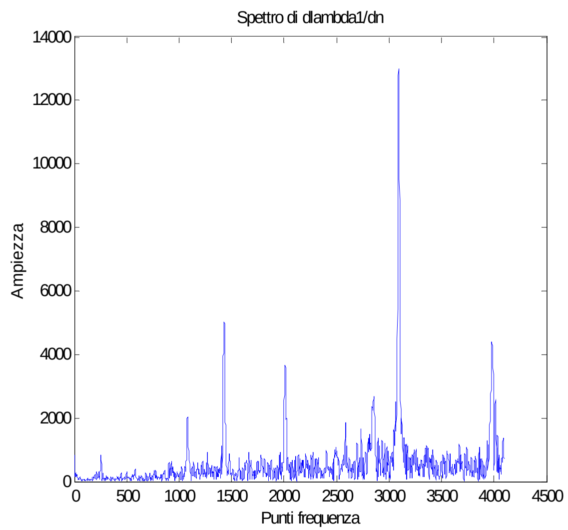
Spettrogramma

Lo spettro di Fourier permette di quantificare il contributo spettrale di ogni singola frequenza, calcolato su l'intera durata del segnale, sia esso limitato nel tempo, sia esso illimitato. Tuttavia spesso risulta utile cercare di localizzare nel tempo la comparsa di una data componente frequenziale, cosa che non è possibile fare con le sole informazioni dello spettro.

Un utile strumento per determinare la comparsa o la persistenza nel tempo delle componenti spettrali è lo spettrogramma, ovvero un grafico tempo frequenza per mezzo del quale è possibile definire l'energia di una data componente del segnale al variare del tempo.

Ciò presuppone che il segnale sia comunque troncato o finestrato nel tempo, quindi moltiplicato per un altro segnale che lo delimita temporalmente. Ciò comporta un piccolo errore dovuto a componenti frequenziali aggiuntive, come abbiamo visto.





Principio di indeterminazione tempo-frequenza

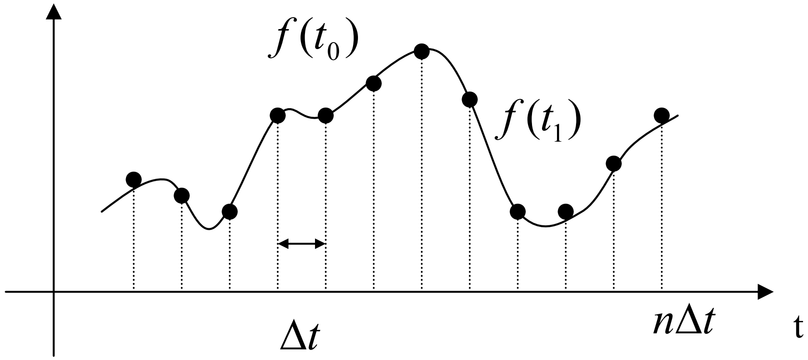
Il problema fondamentale dell’analisi mediante spettrogramma è essenzialmente un limite insito nella trasformata di Fourier dato dal Principio di Indeterminazione tempo frequenza, ovvero l’impossibilità di avere contemporaneamente una risoluzione temporale e frequenziale piccola a piacere. Matematicamente ciò si traduce nella semplice formula:

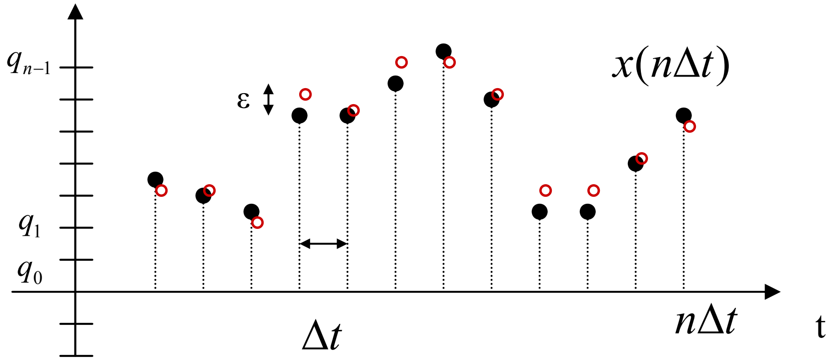
$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \qquad (11)$$

Questa analisi risulta necessaria soprattutto per segnali non più deterministici, ma affetti da una certa quantità di rumore per cui lo spettro del segnale stesso si trova nascosto in un andamento dello spettro che sarà anch’esso di tipo rumoroso. Ma soprattutto l’analisi dello spettrogramma risulta importante nello studio di fenomeni rapidamente variabili nel tempo e non stazionari, che , come vedremo in seguito, rappresentano una gran parte dei fenomeni affrontati dall’analisi dello spettro.

Segnali tempo discreti: il teorema del campionamento

Nella pratica è impossibile condurre misure di segnali tempo continui o calcoli numerici computerizzati ad essi relativi. Occorre quindi campionare i segnali, ovvero usare una **sequenza** di numeri che stimano l'ampiezza del segnale ad un certo intervallo di tempo tempo Δt :





Per misurare ogni campione della sequenza occorre assegnare un livello esprimibile in numeri binari (bit); questa operazione si chiama **quantizzazione** , ed è tanto più precisa quanto maggiore è il numero di bit assegnati per misurare ogni campione della sequenza.

Per quanto riguarda il campionamento del segnale esso ha una regola fondamentale che va sotto il nome di **Teorema di Shannon**: ovvero, sia la frequenza di campionamento **f_c=1/ Δt,** e sia **B** la ampiezza di banda del segnale campionato, allora deve sussistere la relazione

$$f_c \geq 2 * B$$

ovvero la frequenza di campionamento deve essere maggiore o uguale della massima frequenza di banda del segnale, per avere una corretta ricostruzione del segnale analogico da quello campionato.

Segnali tempo discreti: DFT ed FFT

Si consideri una sequenza x(nT), che da adesso in poi chiameremo solo x(n), con n intero. In analogia al caso continuo, per ottenere la sua trasformata di Fourier occorre moltiplicarla scalarmente per la sequenza esponenziale complesso

$$DFT(x) = \overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i2\pi nTf}$$

La DFT (Discrete Fourier Transform) è una funzione discreta della variabile continua f, come x(n) lo è della variabile continua t (cioè tempo). Si può dimostrare che essa è un campionamento opportuno della trasformata continua di Fourier del corrispondente segnale tempo continuo che avevamo chiamato s(t).

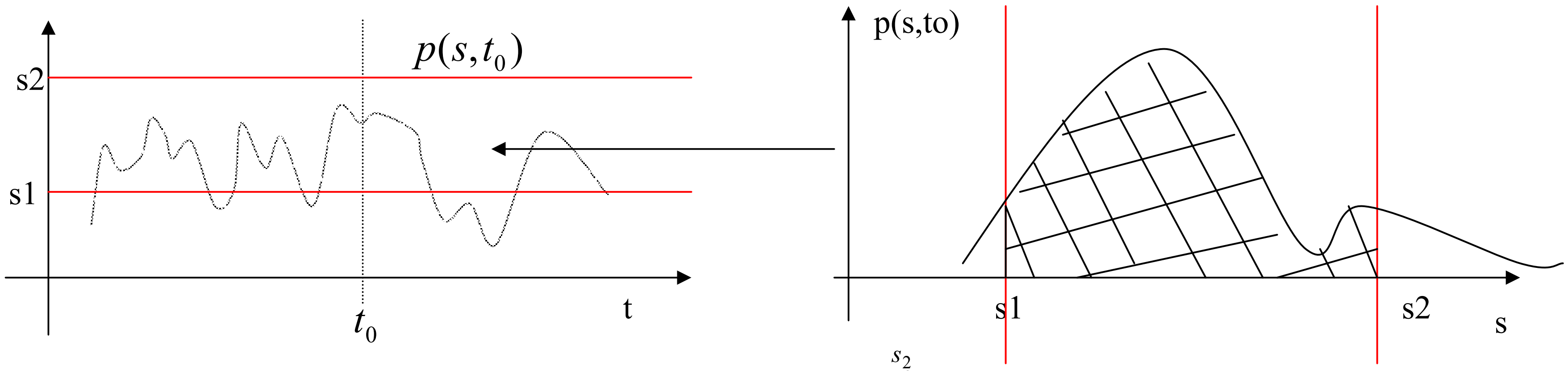
$$\begin{tikzcd}
s(t) \arrow[r] \arrow[d] & S(f) \arrow[d] \\
x(n) \arrow[r] & X(nfo)
\end{tikzcd}$$

Quindi la DFT altro non è che un campionamento della Trasformata di Fourier tempo continua, secondo la frequenza f_o=1/T che è la frequenza di campionamento.

Negli anni ’60 è stato ideato un metodo per calcolare la DFT in modo veloce; tale metodo si chiama Fast Fourier Transform, permette di ridurre la complessità di calcolo da N*N a ½*N$\log_2$(N)

Segnali aleatori

Un segnale di dice aleatorio quando è possibile prevedere solamente la probabilità che il segnale assuma un certo valore ad un dato istante. In altre parole non esiste un valore del segnale $s(t_o)$ corrispondente al tempo t_o, ma una probabilità $p(s,t_o)$ che il valore $s(t_o)$ cada all'interno di un intervallo arbitrario di valori $[s_1,s_2]$.



$$P(s_1 \leq s(t_0) \leq s_2) = \int_{s_1}^{s_2} p(s,t_0)ds$$

La funzione $p(s,t_o)$ si chiama unzione densità di probabilità, e fornisce una misura della probabilità che il segnale s(t)

nell'istante t_o sia compreso nell'intervallo $[s_1,s_2]$.

Valgono le seguenti proprietà fondamentali:

$$P(s(t_0) = s_1) = \int_{s_1}^{s_1} p(s,t_0)ds = 0$$

1) non esiste la certezza che $s(t_o)$ sia pari ad un valore dato

$$P(-\infty \leq s(t_0) \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,t_0)ds = 1$$

2)

Segnali aleatori : statistiche

Definiamo processo stocastico una ripetizione di un numero N finito di volte del segnale aleatorio s(t) che viene definito **variabile membro** del processo stocastico. L'insieme dei valori di s(t) ad un dato istante t_o rappresenta una variabile aleatoria, che avrà una densità di probabilità $p(s,t_o)$, e dalla quale si possono evincere determinati parametri statistici ad essa legati, come:

1) Valor medio

$$\eta(t) = E[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot p(s,t)ds$$

2) Correlazione

$$R(t_1,t_2) = E[s(t_1)s(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1 s_2 \cdot p(s_1,t_1;s_2,t_2)dsds_2$$

Il valor medio misura la media di insieme fatta su tutti i valori assunti dalla variabile membro s al tempo t, quindi su tutte le variabili membro all'istante t. La correlazione misura di quanto è simile a se stesso un processo stocastico al variare del tempo t (istanti t1 e t2) in due diverse variabili membro del processo.

Un processo stocastico si dice stazionario in ***senso stretto*** quando le sue caratteristiche statistiche non cambiano se si sposta l'origine dei tempi, vale cioè la seguente relazione per qualunque ε : $p(s,t)=p(s,t+\varepsilon)$;

Un processo stocastico si dice stazionario in ***senso lato*** se:

$$\eta = E[s(t)] = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} s(t)dt$$

1) $\eta(t)=\eta$ = costante;

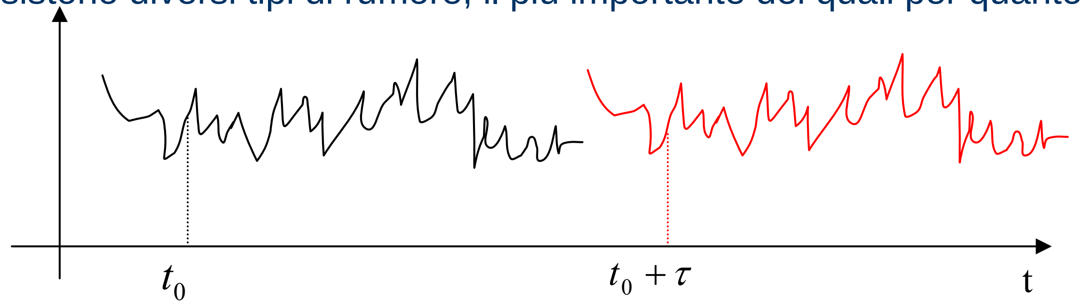
Rumore

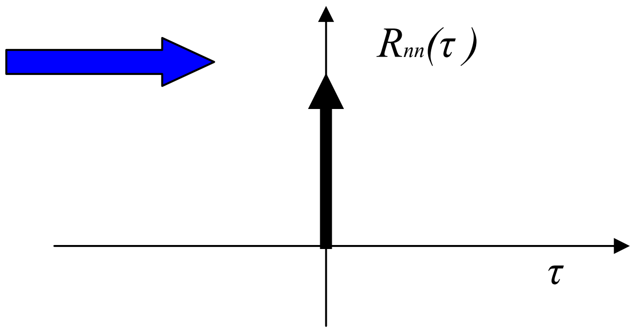
Qualsiasi segnale riscontrato nella realtà, si presenta sempre con un certo grado di incertezza, cioè con una componente non correlata (o debolmente correlata) che comunque è indesiderata e dipende da tanti fattori (incertezza dello strumento di misura, disturbi di qualsiasi natura). Possiamo definire rumore un qualsiasi processo stocastico che si manifesta sovrapponendosi ad un fenomeno fisico da misurare, peturbandone l'andamento, il livello di correlazione ed il grado di predittività. Ogni segnale reale x(t) si po' pensare come la somma di una componente deterministica s(t) ed una aleatoria o stocastica n(t):

x(t)=s(t)+n(t);

da questa espressione possiamo definire il Rapporto Segnale Rumore (Signal to Noise Ratio) , come il rapporto tra la stima della potenza del solo segnale e quella della potenza del rumore: SNR=Ps/Pn (vedi 3)

Esistono diversi tipi di rumore, il più importante dei quali per quanto ci riguarda è il **rumore bianco**.



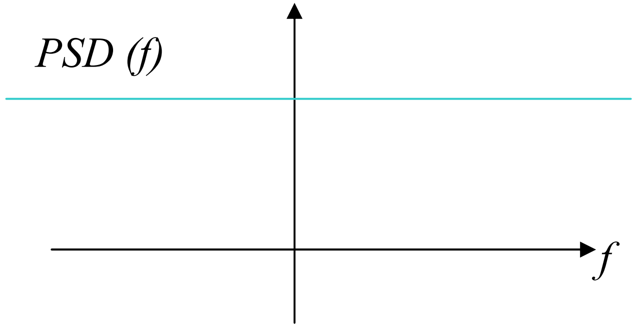


La funzione di autocorelazione è un impulso delta di Dirac.

Rumore

Poiché la densità spettrale di potenza (spettro), ovvero il contributo al segnale di ogni singola frequenza, si può ricavare dalla Trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione , si ottiene:

$$PSD = F(R_{xx}(\tau)) = cost$$



SPETTRO COSTANTE

o

BIANCO

Tutte le frequenze hanno la stessa ampiezza, lo stesso contributo.

Un rumore bianco non porta informazioni !

Rumore Termico

Nasce dal movimento caotico degli elettroni in un corpo conduttore, movimento dovuto proprio all'agitazione termica. Nell'ipotesi che sia hf/kT << 1 , la densità spettrale di potenza disponibile da un tale conduttore posto a temperatura T, vale PSDn=kT.

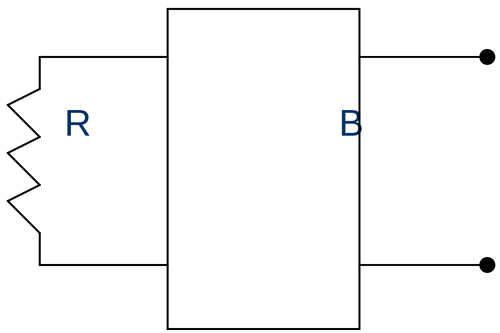
h=6.62*Exp(-34) j*sec costante di Planck

k=1.38*Exp(-23) j/Kelvin costante di Boltzmann

Pn=kBT

f= frequenza centrobanda

T= temperatura



Misura dello Spettro di Potenza

La stima dello spettro di potenza di un segnale (deterministico o aleatorio) , può avvenire mediante l'uso di due tecniche fondamentali, ovvero per mezzo del calcolo della FT del segnale (DFT o FFT nel caso discreto) , e con il calcolo della funzione di autocorrelazione del segnale:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} PSD(f)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(2\pi jf)df$$

Ricordando la (10)

ricaviamo la densità spettrale di potenza (spettro) come il quadrato della trasformata di Fourier del segnale s(t):

$$PSD(s(t)) = S^2(2\pi jf)$$

Parallelamente, se calcoliamo la funzione di autocorrelazione del segnale s(t) e ne facciamo la trasformata di Fourier, otteniamo ancora la densità spettrale di potenza:

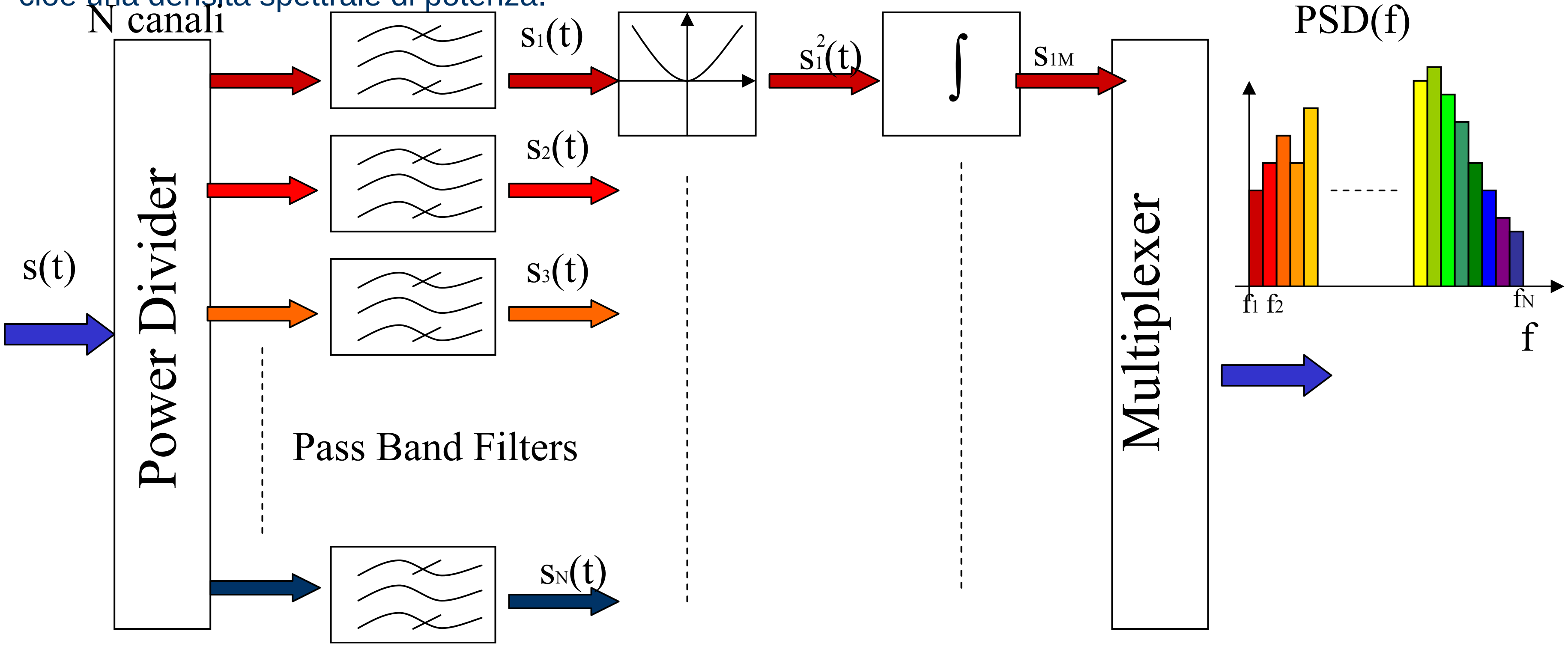
$$PSD(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Rxx(t)e^{-j(2\pi f)t}dt$$

Entrambi i metodi permettono di ottenere la distribuzione delle diverse frequenze come ampiezze nel comporre il

Spettrometri FB

1) Spettrometri FB (Filter Bank).

Il segnale in ingresso , prevalentemente analogico (ma anche digitale), viene fatto processare da un banco di N filtri (canali) accordati a frequenze contigue in modo tale da suddividere il segnale stesso in un certo numero di sottobande, cioè porzioni di spettro. Se indichiamo con Δ F la larghezza di ogni sottobanda e con N il numero di canali, otteniamo una risoluzione spettrale B=Δ F/N; ogni segnale ottenuto viene quadrato, filtrato e mediato in modo da ottenere un valore di potenza per ogni canale (unità di frequenza) cioè una densità spettrale di potenza.



Spettrometri FB

Uso:

Prevalentemente nei sistemi analogici, ma si può usare anche nei sistemi digitali , basta implementare un campionamento opportuno, in modo tale da garantire una opportuna risoluzione spettrale (vedi principio indeterminazione tempo frequenza).

Vantaggi:

- Semplicità di assemblaggio e progettazione
- Velocità nel calcolo dello spettro.
- Possibilità di risalire alle informazioni di fase delle componenti frequenziali dello spettro.

Svantaggi:

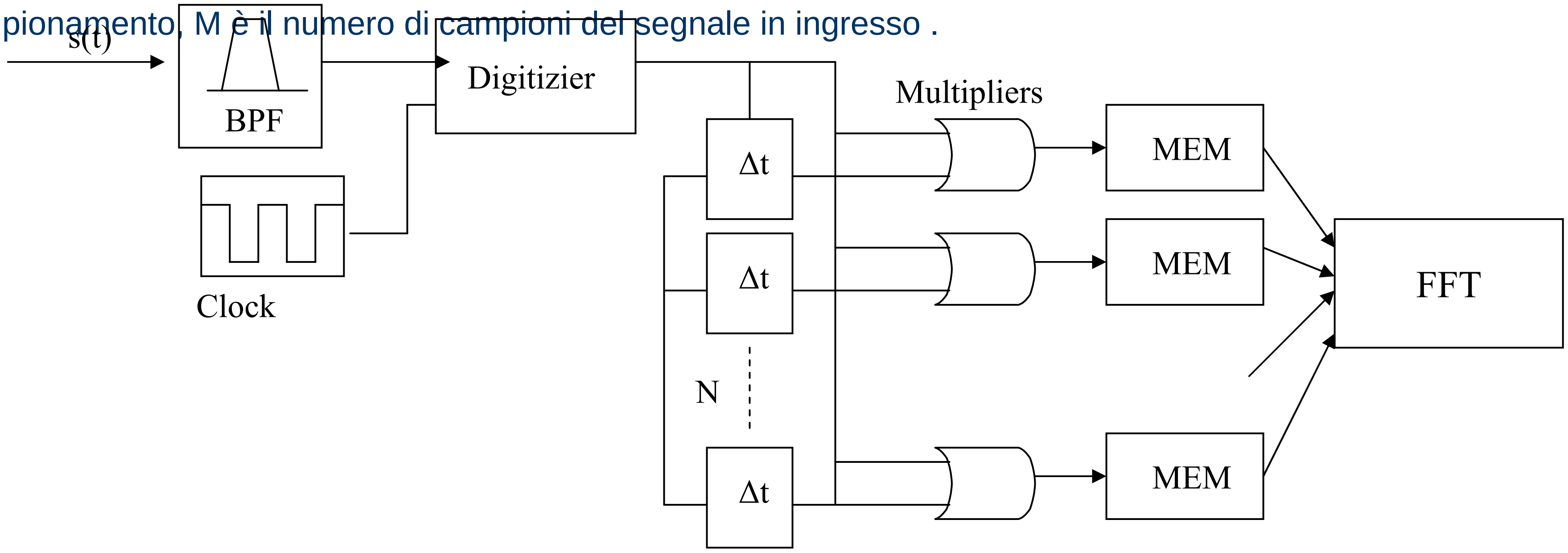
- Attenzione nel progetto dei filtri BP, ognuno deve essere progettato singolarmente;
- Forte sensibilità al rumore, anche mediante integrazione di diverse frames di segnale (stazionario!!!)
- Nel caso di implementazione digitale occorre avere un numero rilevante di bit di quantizzazione.

Spettrometri digitali: Autocorrelatore

Uno spettrometro ad autocorrelazione permette di stimare lo spettro di potenza tramite il calcolo della funzione di autocorrelazione del segnale in ingresso ed in particolare della sua trasformata di Fourier. Tipicamente si tratta di strumenti digitali, che presuppongono le operazioni di campionamento e di quantizzazione con un certo numero di bit.In base alla definizione matematica della funzione di autocorrelazione che ricordiamo in forma tempo discreta:

$$R_{xx}(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{M} x(k\Delta t)\, x(k\Delta t + n\Delta t)$$

dove n=0,1,2…N-1 con N= numero di canali dell'autocorrelatore e Δt è l'inverso della frequenza di campionamento, M è il numero di campioni del segnale in ingresso .



Spettrometri digitali: Autocorrelatore

Uso:

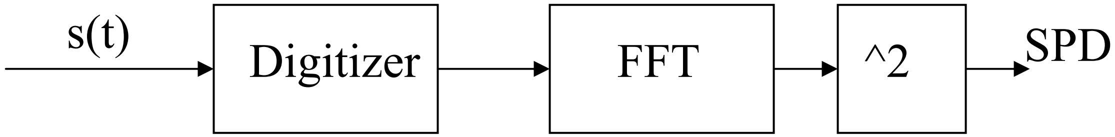
Prevalentemente nei sistemi digitali, (ma non solo) , con dati fortemente rumorosi

Vantaggi:

- **Permette un abbattimento di principio del rumore, in quanto esso è praticamente incorrelato e quindi non viene computato nel calcolo della funzione di autocorrelazione, o meglio viene notevolmente ridotto.**
- Semplicità di costruzione e di progetto.
- Svantaggi:
- Si introduce una certa componente di ritardo dovuta allo shift temporale del segnale.
- Consente un funzionamento per segnali campionati anche ad un bit, ma perde in qualità di rapporto segnale rumore di un fattore π /2, per cui occorre aumentare il tempo di esposizione per integrare e abbattere il rumore.
- Si perdono completamente le informazioni di fase.

Spettrometri digitali: FFT

Il funzionamento di questo tipo di spettrometro digitale è basato sull'applicazione della FFT al segnale di ingresso ch opportunamente digitalizzato (campionato e quantizzato). Tale risultato viene poi quadrato per ottenere proprio la de spettrale di potenza. Tale tecnica è più veloce della tecnica mediante autocorrelazione, anche se è più sensibile alle rumorose dalle quali il segnale è affetto.



In generale le fasi da seguire per ottenere un risultato efficace per la misura dello spettro sono le seguenti:

- Osservazione On-Source per un tempo opportuno dati i parametri dell'esperimento;
- Media aritmetica degli spettri ottenuti, per ottenere uno spettro le cui componenti rumorose sono diminuite;
- Osservazione Off-Source per un tempo tale da abbattere il rumore, ma calcolare la frequency baseline data i generale

dal sistema ricevente.

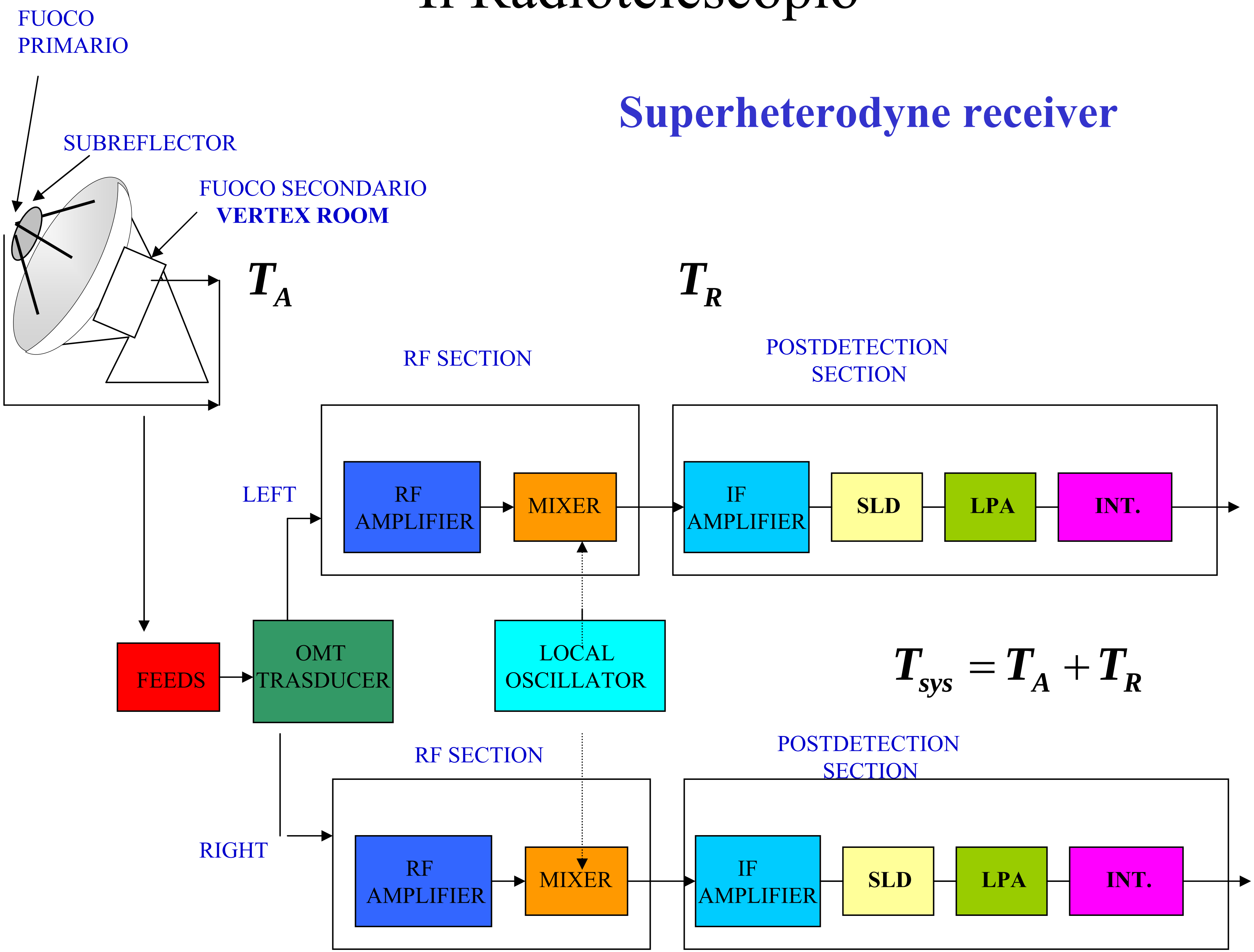
4) Calibrazione degli spettri mediante l'uso di opportune marche di calibrazione.

5) La fase di media degli spettri che produce il risultato mediato nel tempo, deve essere preceduta da una opera

di compensazione dello spostamento Doppler dovuto ai moti terrestri. Questa operazione va fatta ad ogni ciclo, per è

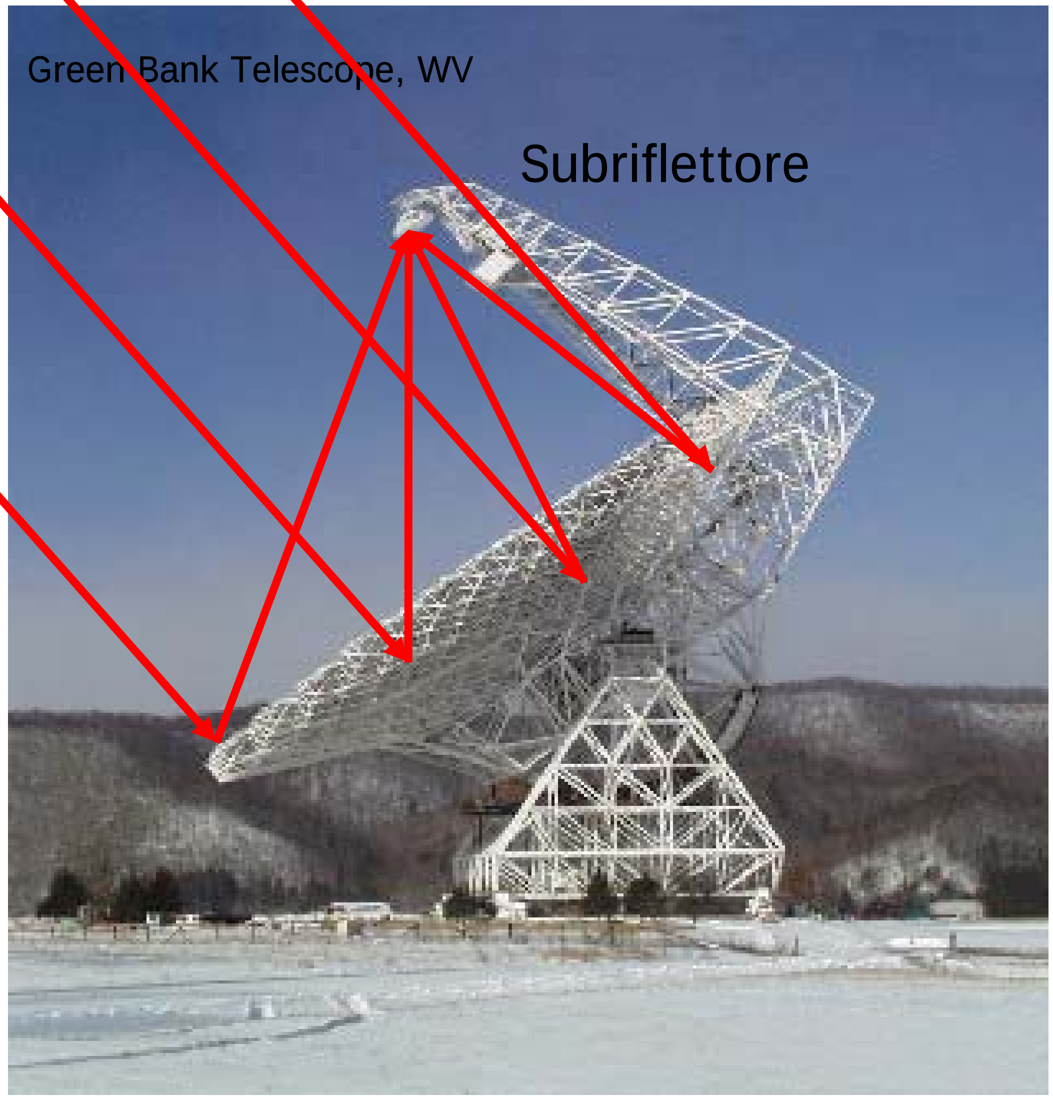
compito dell'osservatore scegliere la durata dei singoli blocchi osservativi in modo da rendere trascurabili lo sposta

Il Radiotelescopio



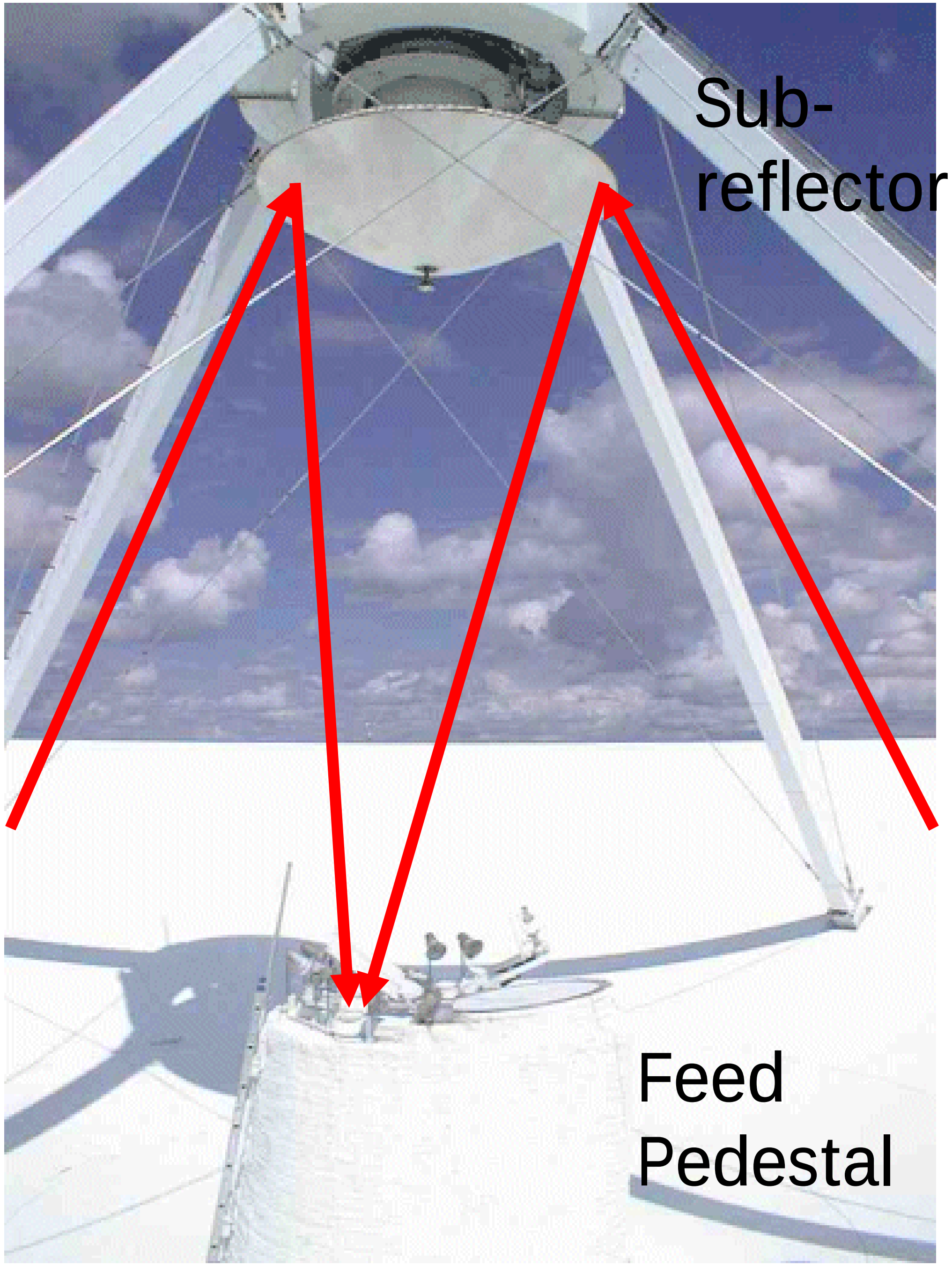
Parabolic Dish

- Superficie riflettente in alluminio
- Concentra la radiazione verso il fuoco primario o il subriflettore



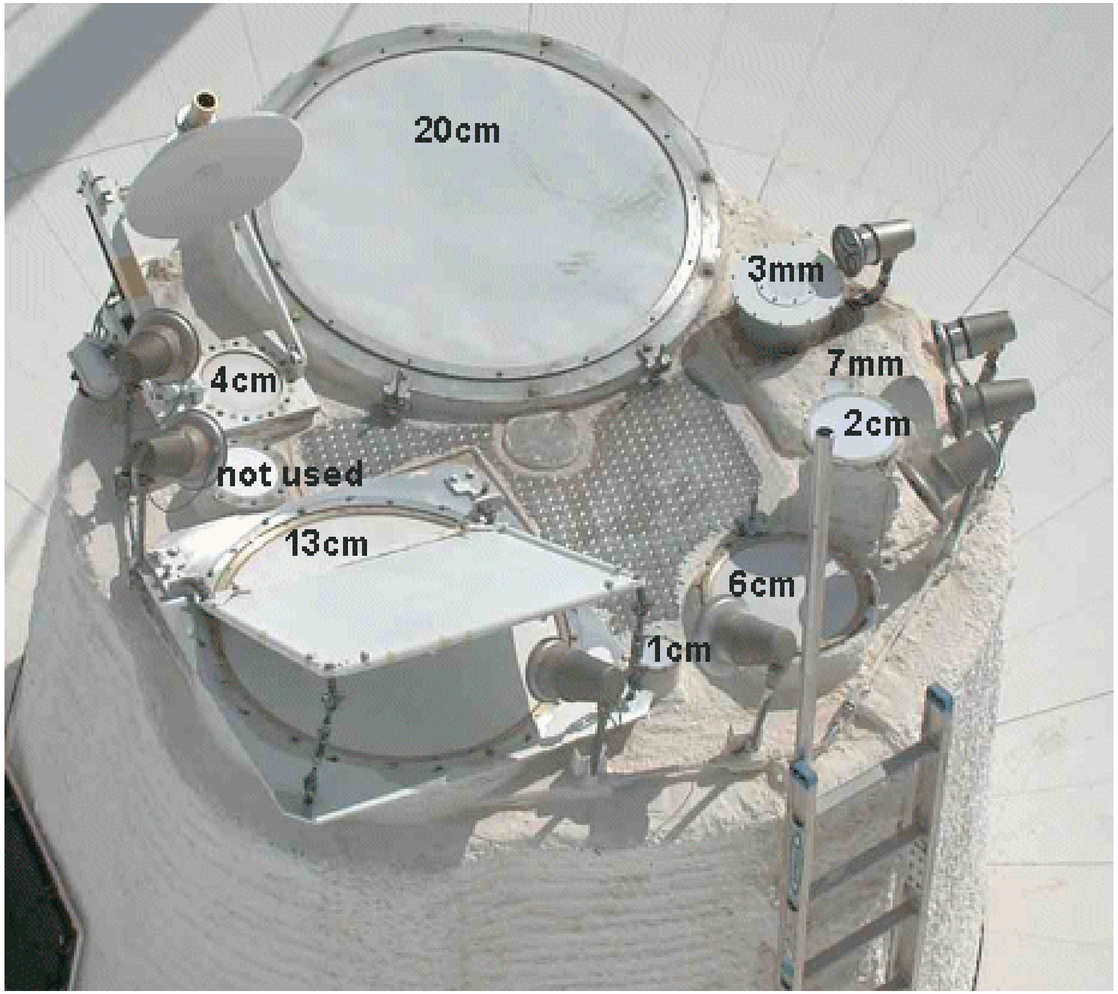
Subriflettore

- Ridireziona la radiazione verso il fuoco secondario dove possono esserci piu` ricevitori



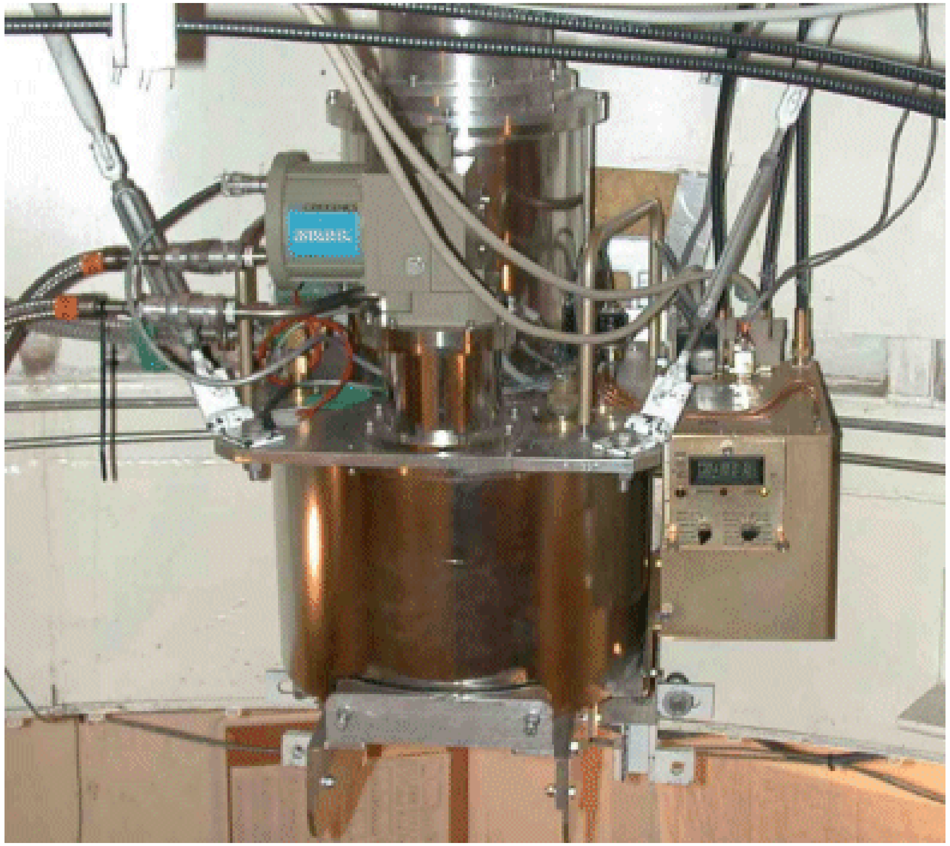
Feed Pedestal

1.5GHz	20cm
2.3GHz	13cm
4.8GHz	6cm
8.4GHz	4cm
14GHz	2cm
23GHz	1.3cm
43GHz	7mm
86GHz	3mm



327MHz	90cm
610MHz	50cm

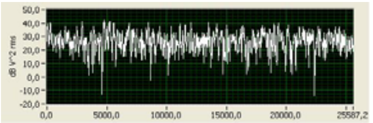
Ricevitori



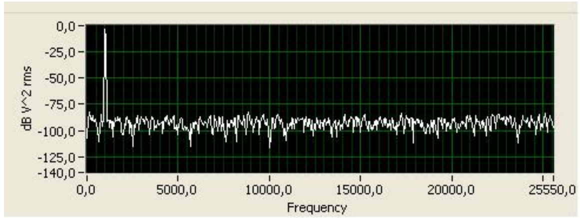
Il Radiotelescopio

Back End e trattamento dati

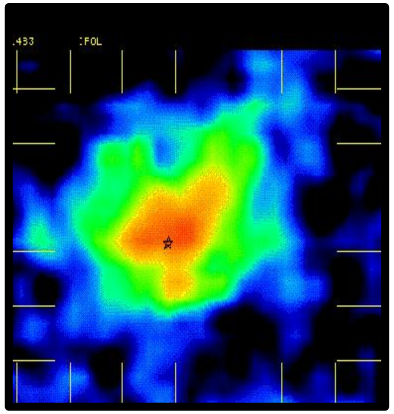
Segnale ricevuto
2 Canali IF (500-1000 MHz)



BBC: Sistema di Filtraggio Analogico in
14 Sottobande (0.0625-16 MHz)



SPETTROMETRO (ARCOS)



MAPSCAN

TPI

Total Power Integrator

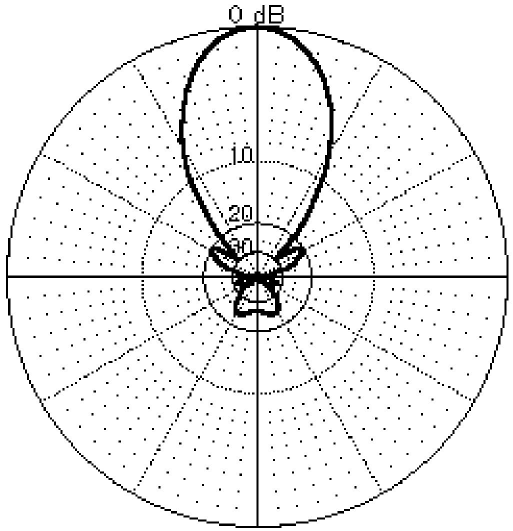
Supporti Memoria di Massa

MK4, S2, MARK 5

Collegamento TCP/IP

LARGA BANDA, > 1GBs

Parametri d'antenna



- Power Pattern

$P(\theta,\phi)$ è la distribuzione angolare della potenza irradiata da una antenna nello spazio

- Beam normalizzato

$$P_n(\theta,\phi)=\frac{P(\theta,\phi)}{P_{\max}(\theta,\phi)}$$ è il Power Pattern normalizzato.

- Angolo solido del diagramma d'antenna

$$\Omega_A=\int_{4\pi}P_n(\theta,\phi)d\Omega$$ È l'angolo solido sotto il quale un radiatore uniforme di potenza Pmax irradia la stessa potenza dell'antenna

- Direttività

$$D=\frac{4\pi}{\Omega_A}$$ è il rapporto tra tutto l'angolo solido e quello dell'antenna.

- Half Power Beam Width

Misura l'angolo che sottende il livello di metà potenza del lobo principale, ovvero il potere risolutivo di una antenna. Non è necessariamente correlato con la direttività, basti pensare ad un pattern con lobi secondari alti.

- Angolo solido del lobo principale

$$\Omega_M=\int_{m.l.}P_n(\theta,\phi)d\Omega$$ è l'integrale del Power Pattern esteso al lobo principale.
Dà una misura della potenza totale irradiata nel lobo principale.

- Efficienza del lobo principale

$$\eta_M=\frac{\Omega_M}{\Omega_A}$$ Misura la concentrazione del power pattern nel lobo principale. Non è necessariamente correlata con la risoluzione

Parametri d'antenna

- Area efficace

$$A_e = \frac{W_\nu}{mS(\nu)}$$

è il rapporto tra la potenza monocromatica misurata ed il flusso noto di una sorgente (per es. una sorgente di calibro). Il fattore m tiene conto della polarizzazione del segnale che si è in grado di ricevere.

- Efficienza di apertura

$$\eta_A = \frac{A_e}{A_g} \leq 1$$

è il rapporto tra l'area efficace e l'area geometrica dell'antenna.

- Principio di Indeterminazione

$$A_e \cdot \Omega_A = \lambda^2$$

Questa relazione lega la apertura efficace all'angolo solido dell'antenna, ponendo come limite il quadrato della lunghezza d'onda.

- Temperatura d'antenna

$$T_a = \frac{W_\nu}{k} = \frac{mA_e S(\nu)}{k}$$

La temperatura a cui dovrebbe trovarsi una ipotetica resistenza per irradiare una potenza di rumore termico Wv pari a quella ricevuta dalla antenna.

- Relazione fondamentale

$$S(\nu) = \frac{kT_a}{mA_e} = \frac{kT_a}{m\eta_A A_g} = \frac{T_a}{G}$$

Dalla relazione precedente e dalla definizione di apertura efficace è possibile ricavare l'espressione del flusso della radiazione misurato dalla antenna, e quindi alla definizione di guadagno della antenna:

$$G = \frac{m\eta_A A_g}{k} \qquad \text{K/Jy}$$

Temperatura di Sistema e Sensibilità del Radiotelescopio

• Si definisce Temperatura di Sistema Tsys la temperatura a cui dovrebbe trovarsi un conduttore per dare luogo alla stessa densità spettrale di potenza di rumore misurata dal radiotelescopio (W=kT).

• La Temperatura di antenna Ta misura la potenza inviata sull'antenna dalla radiosorgente.

•La Temperatura dei ricevitori Tr misura la potenza di rumore introdotta dall'elettronica che processa il segnale ricevuto. Essendo il carattere rumoroso delle distribuzioni di potenza di tipo stazionario ed ergodico, ed essendo queste ultime statisticamente indipendenti tra loro, si può dimostrare che:

$$\boldsymbol{T}_{sys} = \boldsymbol{T}_{A} + \boldsymbol{T}_{R} \cong \boldsymbol{T}_{R}$$

Le misure che si effettuano riguardano le deviazione medi della Tsys, in modo tale da calcolare Ta. Si può dimostrare che questa deviazione è :

$$\Delta \boldsymbol{T}_{r.m.s.} = \alpha \frac{\boldsymbol{T}_{sys}}{\sqrt{\Delta \upsilon \tau}}$$

Cioè la variazione media di temperatura di sistema è proporzionale alla stessa temperatura di sistema, ma inversamente alla larghezza di banda osservata ed al tempo di integrazione.

Dalla relazione che lega la temperatura di antenna al flusso $S(\nu) = \frac{kT_a}{mA_e} = \frac{kT_a}{m\eta_A A_g} = \frac{T_a}{G}$

Sostituendo si ottiene l'espressione della sensibilità del radiotelescopio, intesa come la più debole emissione radio che lo strumento riesca a rivelare .

$$\Delta \boldsymbol{S}_{r.m.s.} \cong \alpha \frac{\boldsymbol{T}_R + \boldsymbol{T}_A}{\boldsymbol{G}\sqrt{\Delta \upsilon \tau}}$$

Nel progetto di una osservazione di una radiosorgente di flusso atteso So, occorre sempre conoscere i parametri caratteristici di uno strumento dai quali si può desumere se, dopo un ragionevole tempo di integrazione, è possibile rivelare un flusso opportuno, tipicamente $\boldsymbol{S}_0 > 5\Delta \boldsymbol{S}_{r.m.s.}$

Ottica Attiva

Deviazioni del profilo della antenna da quello nominale agiscono in due modi sulla radiazione:

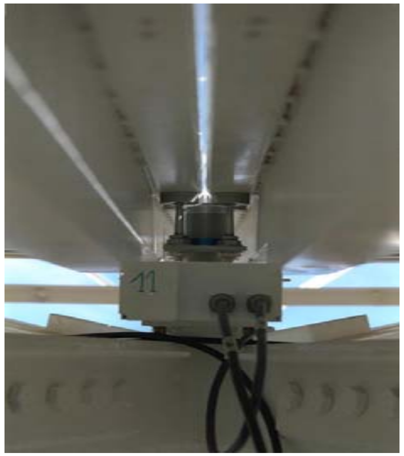
• la riflettono in direzioni diverse da quella del fuoco riducendo così la potenza raccolta dal feed;

• introducono errori di fase che fanno si che i campi elettrici generati da ogni elemento della superficie (principio di Huygens) non si sommino più in maniera corretta, riducendo ancora la potenza raccolta.

In entrambi i casi il fenomeno viene quantificaAttivato nel peggioramento dell'area efficace Ae e della efficienza della antenna.

$\delta \approx 2 \cdot \left(\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda}\right)$	$\frac{A_e}{A_e^0} \approx 1 - \langle \delta^2 \rangle$	$\langle \delta^2 \rangle = \left(\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}\right)\left[1 - e^{-\left(\frac{d}{C}\right)^2}\right]$	$\frac{A_e}{A_e^0} \approx \left[e^{-\langle \delta^2 \rangle} + \left(1 - e^{-\langle \delta^2 \rangle}\right) f(C, \lambda)\right]$
Variazione di fase.	Relazione approssimata	Variazione di fase con correlazione.	Area efficace effettiva

Le suddette deviazioni da tale profilo possono essere causate dalla rugosità dei pannelli che costituiscono lo specchio, (in questo caso è ammissibile un valore di rugosità o imperfezioni circa 20 volte più piccolo della minima lunghezza d'onda di lavoro della antenna), oppure da deformazioni causate da effetti atmosferici, o da effetti gravitazionali.



Questi ultimi effetti possono essere corretti con la implementazione della cosiddetta ottica attiva , ovvero la possibilità di correggere automaticamente, in funzione dell'elevazione, il profilo della parabola posizionando i pannelli secondo un profilo ideale precalcolato. Questa ultima operazione avviene mediante attuatori collegati ai pannelli e solidali alla struttura portante dell'antenna.